El problema de Cauchy asociado a una perturbación no local de la ecuación de Benjamín–Ono periódica

The cauchy problem associated to a non linear local perturbation of the periodic Benjamín-Ono equation

Darwin Peña González[1]

[1] *Magíster en Ciencias de la Matemática, Profesor Tiempo Completo, Universidad Autónoma del Caribe.*
Email: darwindacier@hotmail.com.

Recibido 10/10/11, Aceptado 05/05/2012

RESUMEN

El propósito de este trabajo es estudiar el buen planteamiento **local** de la ecuación diferencial de Benjamin-Ono, $\partial_t u = -2u\partial_x u - H\partial_x^2 u$ la cual se le agregaran dos cantidades, una disipativa y otra de inestabilidad y mediante técnicas clásicas y en los espacios de Sobolev periódicos $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ mostraremos la buena colocación del problema de valor inicial, para $s > \frac{1}{2}$.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales parciales, buen planteamiento local del problema, espacios de Sobolev periódicos, Cauchy, Perturbación no local de la ecuación KdV.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the **local** sound approach to the differential equation of Benjamin–Ono $\partial_t u = -2u\partial_x u - H\partial_x^2 u$ which will add two numbers, one dissipative and one of instability and by classical techniques and periodic Sobolev spaces $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ show good positioning of the initial value problem, for $s > \frac{1}{2}$.

Keywords: Partial differential equations, good local approach to the problem, periodic Sobolev spaces, Cuachy, No local perturbation of equation Kdv.

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u\ t,x\ + u\ t,x\ \partial_x u\ t,x\ + \partial_x^3 u\ t,x\ = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ha sido objeto de intensas investigaciones en diversas áreas de la física y de la matemática tales como en la teoría de fluidos [1-5], sistemas completamente integrables [1], en ecuaciones diferenciales parciales [10] por mencionar algunas de ellas. Álvarez [2] estudia el problema de Cauchy asociado a una perturbación no local de la ecuación (KdV). En este artículo se aborda el buen planteamiento local del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \gamma\partial_x^2 u - 2u\partial_x u + \mu H\partial_x u - \beta H\partial_x^2 u \\ &u\ t,0\ = \phi\ t\ , \qquad \phi \in C\ \ 0,T\ ; H^s(\mathbb{T}) \end{aligned} \quad (2)$$

En los espacios de Sobolev $H^s(T)$, donde ϒ, μ>0, ß ∈ R. La ecuación (2) es una perturbación disipativa de la ecuación

$$\partial_t u = -2u\partial_x u - H\partial_x^2 u \quad (3)$$

Donde (3) es la ecuación de Benjamin-Ono, la cual describe la interface entre dos fluidos de diferentes densidades y de profundidad infinita, en la que se le han agregado dos cantidades, una disipativa y otra de inestabilidad.

La ecuación (2) se origina en el estudio de fluidos y turbulencia del plasma [6]. Para esta propuesta, el buen planteamiento que haremos de (2), será en los espacios de Sobolev periódicos $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ y haciendo uso de técnicas clásicas probaremos que (2) está localmente bien planteado en $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ para $s > \frac{1}{2}$.

2. METODOLOGÍA

Para la solución del problema (2) se realiza una consulta bibliográfica exhaustiva relacionada con las ecuaciones Korteweg-de Vries (KdV) y de Benjamin-Ono. Para probar la buena colocación del problema (2), se resuelve el caso lineal de la ecuación (2), luego probamos la equivalencia entre la ecuación diferencial e integral, para después mostrar la existencia, unicidad y por último la dependencia continua de la solución del problema (2) para el caso local.

2.1 Elementos preliminares para la solución del problema planteado

En esta sección presentaremos las notaciones y algunos lemas, proposiciones y teoremas que serán fundamentales.

1. H es la transformada de Hilbert de f y es definida por

$$\widehat{Hf(k)} = -\frac{1}{2}\, sgn(k)\hat{f}(k),\ con\ sgn(k) = \begin{cases} -1, & k<0 \\ 1, & k>0 \\ 0, & k=0 \end{cases}$$

2. Para $s \in$ R, el espacio $H^s(\mathbb{T}) = \{f \in P' : (1+k^2)^{1/2}, \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$ es el espacio Sobolev de orden el cual es un espacio de Hilbert con producto interno.

3. $$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}d\xi \tag{4}$$

Escribiremos

$$A = -(-\mu H\delta_x u + ßH\delta_x u + vdxu) \tag{5}$$

$$B(k) = \frac{|k|}{2} + ß\frac{i}{2}k|k| - k^2 \tag{6}$$

$$E(t)\phi = (e^{t\frac{|k|}{2} + ß\frac{i}{2}k|k| - k^2})\phi(k))^v \tag{7}$$

$$E(t)\phi = (e^{tB(k)})\hat{\phi}(k))^v \tag{8}$$

Lema 1: Sean $a,b \in [0+\infty]$ y $\lambda \geq 0$. Entonces existen constantes positivas y dependiendo solo de tal que

$$c_\lambda(a^\lambda + b^\lambda) \leq (a+b)^\lambda \leq C_\lambda(a^\lambda + b^\lambda)$$

Dms: Si $a = 0$ no hay nada que probar. Asumamos que $a > 0$. Entonces, es equivalente a

$$c_\lambda\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^\lambda\right] \leq \left[1 + \frac{b}{a}\right]^\lambda \leq C_\lambda\left[1 + \frac{b}{a}\right]^\lambda$$

Así que es suficiente probar que hay constantes c_λ y C_λ tal que

$$c_\lambda(1 + r^\lambda) \leq (1+r)^\lambda \leq C_\lambda(1+r)^\lambda$$

Para cualquier $r \in (0, \infty)$. Esto se sigue gracias a la función

$$F(r) = \frac{(1+r)^\lambda}{1+r^\lambda}$$

Teorema 1: (Del punto fijo de Banach). Si **X** es un espacio métrico completo y $A{:}X \to X$ es una contracción, es decir, existe $0 \leq C \leq 1$ tal que $d(A(x), A(y)) \leq Cd(x,y)$ para todo par $x,y \in X$, entonces existe único $xA \in X$ tal que $A(x_A) = x_A$

Dms: Ver [5] y las referencias dadas allí.

Lema 2: Sean $ß > 0$. $\gamma > 0$, $ß + \gamma > 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ y g una función no negativa tal $t^{\gamma-1}\, g(t)$ que es localmente integrable en [0,T] suponga que

$$g(t) = a + b\int_0^t (t-t)^{ß-1}\tau^{\gamma-1}g(\tau)d\tau \tag{9}$$

En (0, T) entonces

$$g(t) \leq aE_{ß,\gamma}(b\Gamma(B)^{1/v}t)$$

Donde $v = ß + \gamma - 1 > 0$

$$E_{ß,\gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m s^{mv} \tag{10}$$

Con $C_o = 1$

$$\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\Gamma(mv+\gamma)}{\Gamma(mv+\gamma)+\beta} \tag{11}$$

Para todo $m \geq 1$

Dms: ver [3] y las referencias dadas alli

Teorema 2: Sean funciones medibles tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_{n(x)} = f(x)$$

Para todo $x \in X$. Si existe $g \in L^1$ tal que para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_{n(x)} \leq g(x)$, entonces $f \in L^1$ y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_x f_n d\mu\right) = \int_x f\, d\mu$$

Dms: ver[14] y las referencias dadas allí

Teoría local en $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$

En esta sección mostraremos que el problema de valor inicial (2) en los espacios de Sobolev $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, donde $v > 0$, $\mu > 0$, $ß \in \mathbb{R}$, está bien planteado localmente en $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ para $s > \frac{1}{2}$. Para lograr este objetivo, probaremos que (2) es equivalente a la ecuación integral

$$u\ t\ = e^{-tA}\phi - \int_o^t e^{-\ t-\tau\ A}\partial_x u^2\ \tau\ d\tau \tag{12}$$

Donde A esta dado por (5) y $\phi \in \mathbb{H}^s\ \mathbb{T}$.

Empezaremos nuestro estudio con la solución de la ecuación lineal asociada a (2)

La ecuación lineal

Dedicaremos estaparte al estudio de la solución de la ecuación lineal asociada a (2), que por comodidad escribiremos

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au = 0 \\ u\ 0\ = \phi \end{aligned} \tag{13}$$

Donde A esta dado por (5) con

$$\nu = 1, \mu = 1, \beta = 1 \text{ y } \phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$$

Teorema 3: *(i)E: [0, ∞] →* $\mathfrak{B}(\mathbb{H}\ \mathbb{T}\ )$ es un semigrupo en además,

$$\|E(t)\|_{\mathfrak{B}\ \mathbb{H}\ \mathbb{T}} \leq \|\phi\|_s \tag{14}$$

(ii) Sea $\lambda > 0$ entonces $E(t) \in \mathfrak{B}\ \ \mathbb{H}^s\ \mathbb{T}\ , \mathbb{H}^{s+\lambda}\ \mathbb{T}$ para todo $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y satisface la desigualdad

$$\|E(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda \left(1 + \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right) \|\phi\|_s \tag{15}$$

Para toda $\phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, donde C_λ es una constante que depende de λ

Proposición 1: La solución de (13) es $u(t) = E(t)\phi$ (16) es decir, la aplicación $t \in [0, \infty] \to u(t) = E(t)\,\phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ es la única que satisface que

$$\lim_{h\to 0}\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - Bu(t) \right\|_{s-2} = 0 \tag{17}$$

Dms: Sean $\phi\ \varphi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ y $u, v \in C\ ([0,\ \mathbb{T}\ ; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ dos soluciones del problema (13) tal que $u(0) = \phi$ *y* $v(0) = \varphi$. Entonces $w(t) = u(t) - v(t)$ satisface (13) con dato inicial $w(0) = \phi - \varphi$. De la prueba de (17) observe que

$$\left\| \frac{e^{-(t+h)A}\phi - e^{-tA}\phi}{h} - Be^{-tA}\phi \right\|_{s-2}^2 = \left\| \left[\frac{e^{-hA} - 1}{b} - B \right] e^{-tA}\phi \right\|_{s-2}^2$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^{s-2} \left| \frac{e^{-\ A} - 1}{b} - B \right| \|\phi\|^2$$

Por el teorema del valor medio y el teorema de convergencia dominada (Teorema 2) nos permite obtener el resultado.

Equivalencia de la ecuación diferencial e integral

En esta sección probaremos que el problema (2) es locamente bien puesto en los espacios de Sobolev $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$.

Teorema 4: Si $s > \frac{1}{2}$, el problema (2) es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = e^{-tA}\phi - \int_0^t e^{-(t-\tau)A}(\partial_x u^2(\tau))\,d\tau \tag{18}$$

Más precisamente, si $u \in C([o, T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ con $s > \frac{1}{2}$, es una solución de (2) entonces satisface (18). Reciprocamente, si $u \in C([o,T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ con $s > \frac{1}{2}$, es una solución de (18) entonces $u \in C^1([0,T]; \mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{T})$ y satisface (2) con derivada dada por

$$\lim_{h\to 0}\left\| \frac{u(t+)h\ - u(t)}{h} - Bu(t) + (\partial_x u^2(t)) \right\|_{s-2} = 0 \tag{19}$$

Dms: La primera parte de la prueba es consecuencia del método de variación de parametros y de observar que el término no lineal $\delta_x u^2$ tiene sentido, pues puede considerarse como una distribución periodica, ya que u^2 es continua y se anula en el infinito para $s > \frac{1}{2}$, en virtud del lema de Sovolev. La segunda parte se obtiene reemplezando la de la ecuación (18) en (19) y por el teorema de convergencia dominada (Teorema 1), la continuidad fuerte e^{tA} del grupo y el teorema del valor medio obtenemos el resultado.

La existencia de la solución del problema (2)

Teorema 5: Sea $\phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, con $s > \frac{1}{2}$. Entonces, existe $T = T(\|\phi\|_s) > 0$ y una única solución $u \in C([0,T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$.

Dms: La idea de la prueba es aplicar el teorema de contracción de Banach (Teorema 1) a la función definida por el miembro de (18) en el espacio adecuado. Con este fin definimos lo siguiente

$$\Phi_T(M) = \{ u \in C([0,T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})) : \|u(t) - e^{-tA}\|_s \leq M \} \tag{20}$$

El cual es cerrado en $C([0,T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$ y por tanto es completo. Luego existe $T > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \Psi : \Phi_T(M) &\longrightarrow \Phi_T(M) \\ u &\longmapsto \Psi(u) \end{aligned}$$

Y se muestsra que $\psi(u) \in C([0,T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ es decir

$$\|\Psi(u(t)) - \Psi(u(t'))\|_s \longrightarrow 0, \quad t' \to t \tag{21}$$

Con $t \in [0,T]$. Luego ψ es una contracción (Teorema 1), con loque existe un punto fijo.

Buen planteamiento local en $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ para $s > \frac{1}{2}$.

Teorema 6: El problema (2) es localmente bien puesto en $\mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ para $s > \frac{1}{2}$. Más precisamente, para $\phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$, existe $T > 0$ y una única solución $u \in C([0,T]; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ que satisface (2) y tal que $u \in C([0,T];\ \mathbb{H}^{s-1}(\mathbb{T}))$. Además, la aplicación de $\phi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T}) \mapsto u \in C\ \ 0,T\ ; \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$ es continua en el siguiente sentido: Sean $\phi_n \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T}),\ n = 1,2,\ldots,$ tales que $\phi_n \to \phi$ y sean $u_n \in C([0,T_n];\ \mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$ soluciones de (2) con $u_n(0) = \phi_n$. Entonces, las soluciones pueden ser extendidas si es necesario al intervalo *[0,T]* para *n* suficientemente grande y

$$\lim_{n\to\infty} sup_{[0,T]} \|u(t) - u_n(t)\|_s = 0(22)$$

Dms: Supongamos que $v \in C([0,T];\mathbb{H}^s(\mathbb{T}))$, $v(0) = \psi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{T})$con $s > \frac{1}{2}$ es solución de (2) con dato inicial ψ. Entonces

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_s &\leq \ e^{-tA}(\phi - \psi)\|_s - \int_0^t \|e^{-(t-\tau)A}(\partial_x(u^2 - v^2))(\tau)\|_{(s-1)+1} d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}})\|\partial_x(u^2 - v^2)\|(\tau)_{s-1} d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}})\|u^2 - v^2\|_s d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}})\|(u+v)(u-v)\|_s d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}})\|u+v\|\|u-v\|_s d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}})(\|u\|_s + \|v\|_s)\|u-v\|_s d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + (\|u\|_{s,\infty} + \|v\|_{s,\infty}) \int_0^t (1 + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}})\|u-v\|_s d\tau \\
&\leq \|\phi - \psi\|_s + \boldsymbol{K_s} \int_0^t (\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}) \|u-v\|_s d\tau
\end{aligned}$$

Por el lema 2

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi - \psi\|_s \boldsymbol{E}\left((K_s\Gamma(\frac{1}{2})^2)\ t\right) \tag{23}$$

Con

$$\boldsymbol{E}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m S^{\frac{m}{2}}$$

Con lo que converge uniformemente en *[0,T]* y es creciente dado que,

$$\frac{c_{m+1}}{C_m} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}+1)}$$

Donde Γ es la función Gamma. Por consiguiente

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi - \psi\|_s \boldsymbol{E}\left((K_s\Gamma(\frac{1}{2}))^2\ T\right) \tag{24}$$

Lo cual muestra la dependencia continua. Y si $\psi = \phi$ entonces $u = v$ con lo que se muestra que es única.

CONCLUSIÓN

- Se demostró que el problema (2) está bien puesto en los espacios de Sobolev periódicos con dato inicial, para es decir, se mostro la existencia la unicidad y la dependencia continua de (2).

REFERENCIAS

[1] Bao-Feng Feng, T. Kawahara, Multi-hump stationary waves for a Korteweg-de Vries equation with nonlocal perturbations, Physica D, 137, (2000), pp. 237-246.

[2] Borys Y. Alvarez S., On the Cauchy problem for a nonlocal perturbation of the KdV equation, Tesis Doctoral, IMPA, 2002.

[3] Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equation, Lectures Notes in Mathematics, vol. 840, Springer (1957).

[4] N. Alon, R. A. Duke, H. Lefmann, V. Rodl, and R. Yuster. The algorithmic aspects of the regularity lemma. J. Algorithms, 16(1): 80-109, 1994.

[5] PrusakR. J. Iorio, Jr., Valeria de Magalhaes Iorio, Fourier Analysis and Partial Diferential Equations, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[6] Qian, H.H. Chen, and Y.C. Lee, A turbulence model whit stochastic soliton motion, Departemento Physics and astronomy. The laboratory for plasma and fusion energy studies, University of Maryland,College Park, Maryland 20742. (Received 19 may 1988; accepted for publication 20 september 1989).

[7] R. J. Iorio, Jr.,On the Cauchy porblem for the Benjamin-Ono Equation, Comm. PDE, 11, (1986), pp.1031-1081.

[8] R. J. Iorio, Jr.,The Benjamin-Ono Equation in Weighted Sobolev Spaces, J. Math. Anal. Appl., Vol.157, No. 2, (1991), pp. 577-590.

[9] R. J. Iorio, Jr.,KdV, BO and Friends in Weighted Sobolev Spaces, Function Analytic Methods for Partial Diferential Equations, Springer-Verlag, vol. 1450 (1990) pp. 105-121.

[10] T. Kato, Nonstationary Flows of Viscous and Ideal Fluids in R3, Journal of functional Analysis, 9 (1972), pp. 296-305.

[11] T. Kato, On the Cauchy problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation, Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 8,(1983), pp. 93-128.

[12] T. Kato and H. Fujita, On the non-stationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32(1962), pp.243-260.

Regularity lemma. J. Algorithms, 16(1): 80-109, 1994.

[13] T. Roger. In_nite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Springer-Verlag. p(50), 1988.

[14] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill. p(28), 1970.