

Desarrollo y aplicación de la teoría de los tubos compuestos de dos materiales diferentes en la recuperación del cuerpo del distribuidor hidráulico de la alzadora BMH-II

Development and application of the theory of the pipes consisted of two different materials in the recovery of the body of the hydraulic distributor of the Cane Carrier BMH-II

**Dr. Rafael Antonio Goytisoló Espinosa¹, Dra. María de Lourdes Bravo Estévez,
Ing. Denis Villafaña Pires, Ing. Ramón Pérez Soca, Ing. Roberto Bravo Agriél,
Ing. Juan J. López Expósito, Dr. Luis M. Castellanos González²**

*1. Profesor Titular. Director de la Línea de Investigación en Mecánica Aplicada. Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez"
Cienfuegos, Cuba. E-mail: ragoyti@ucf.edu.cu*

2. Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez". Cienfuegos, Cuba

Recibido 12/10/09, Aceptado 1/11/09,

RESUMEN

En el Trabajo se analiza en primer lugar la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y las limitaciones que poseen los Tubos Simples para poder soportar grandes presiones. Se describe la variante tecnológica de construir Tubos Compuestos y se profundiza en la aplicación de las Condiciones de Gadolín para poder optimizar su diseño y lograr la capacidad de soportar el doble de la presión interior de los Tubos Simples. En el Trabajo se destaca como en la literatura científica se describe la Teoría de los Tubos Compuestos y las Condiciones de Gadolín sólo para el caso de materiales iguales en ambos tubos. En el presente trabajo se desarrollan las ecuaciones de la Teoría de los Tubos Compuestos para dos materiales diferentes, dúctil el interior y frágil el exterior, las cuales no aparecen descritas en la literatura y se aplican las Condiciones de Gadolín para optimizar la resistencia de ambos tubos. Los resultados obtenidos se aplican en el trabajo a la evaluación de la resistencia durante la recuperación del distribuidor de la Alzadora de Caña BMH-II. En el mismo se describe la avería que sufre este distribuidor, la estructura metalográfica del hierro fundido del mismo y su caracterización, tipo de hierro fundido, su dureza y resistencia mecánica. Se describen también el cálculo de la tensión máxima de trabajo mediante el procesamiento por el Método de los Elementos Finitos, lo que permite precisar dónde surge la grieta y la modelación de su crecimiento. Finalmente se realiza la evaluación de la resistencia de los casquillos de acero y del cuerpo del distribuidor mediante la aplicación de la Teoría de los Tubos Compuestos y se verifica su efectividad mediante las expresiones de cálculo obtenidas.

Palabras clave: Tubos de paredes gruesas, tubos compuestos, condiciones de Gadolin, tubos compuestos de dos materiales diferentes.

ABSTRACT

In this paper analyzes the theory of thick-walled tubes and constraints that have the single tubes to withstand high pressures. It describes the technological form of building composite pipes and deepened in the implementation of the Gadolin' conditions to optimize their design and achieving the ability to withstand twice the pressure inside the single tubes. Working in the stands as in the scientific literature describing the theory of composite pipes and Conditions of Gadolin only for the case of identical materials in both tubes. In this paper we develop the equations of the theory of composite tubes for two different materials, ductile and brittle inside outside, which are not described in the literature and implemented Gadolin conditions to optimize the strength of both tubes . The results are applied to the evaluation work of the resistance during recovery from hydraulic distributor of Sugar Cane Carrier BMH-II. At the same fault described this dealer gets, the metallographic structure of cast iron and

characterization of the same type of cast iron, its hardness and mechanical strength. It also describes the calculation of the maximum working voltage by processing the finite element method, which allows to determine where does the crack and its growth modeling. Finally, it performs the evaluation of resistance of plain steel and the body of the distributor through the application of the Theory of Composite Tubes and its effectiveness is verified by calculation expressions obtained.

Key words: Thick-walled tubes, composite tubes, Gadolin conditions, composite tubes made of two different materials.

NOMENCLATURA

a Radio interior del tubo compuesto [cm]
 b radio exterior del tubo compuesto [cm]
 c Radio de la superficie de encaje del tubo exterior en el interior [cm]
 p_k Presión de contacto en la superficie de encaje durante el ensamblaje de los tubos [MPa].
 p Presión interior de trabajo del tubo compuesto [MPa].
 E_1 y E_2 Módulos de elasticidad de las piezas interior y exterior respectivamente .
 σ_{eq} Tensión equivalente de acuerdo a una Hipótesis de Resistencia[MPa].
 $[\sigma]_t$ Tensión permisible a tracción del material [MPa].
 K relación entre la tensión permisible a tracción de los materiales del tubo interior y el exterior.

K_I Factor de Intensidad de Tensiones $MPa \cdot \sqrt{m}$
 K_{Ic} Tenacidad a la fractura del Material $MPa \cdot \sqrt{m}$

Símbolos griegos

μ_1 y μ_2 Coeficientes de Poisson de los materiales de las piezas interior y exterior respectivamente.
 Δ Interferencia radial entre los tubos [cm]
 δ Interferencia diametral entre los tubos [cm]
 γ Relación entre las tensiones límites a tracción y a compresión del material frágil

Introducción

La Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas (Problema de Lamé en la Teoría de la Elasticidad) surge a finales del siglo XIX como una necesidad de elevar la capacidad de soportar altas presiones en las tuberías de sistemas hidráulicos y en recipientes en general y la misma aparece descrita ya en la literatura Clásica y Avanzada de Resistencia de Materiales de mediados del siglo XX [1,2,3,4]. Sin embargo muy rápidamente se descubrió que estos tubos aunque se aumentara infinitamente sus dimensiones no eran capaces de soportar presiones mayores que la mitad de la tensión permisible de los materiales de que estaban fabricados. Como respuesta a esta limitante se han desarrollado soluciones vinculadas con la forma de fabricación de los tubos de paredes gruesas como son: los tubos pretensados y los tubos compuestos, los cuales elevan la capacidad de carga con relación a los tubos simples, sin embargo los tubos pretensados, por ejemplo, son una solución aplicable exclusivamente a materiales dúctiles con un elevado % de elongación y realmente la respuesta a las altas presiones no es tan efectiva como los tubos compuestos, relativamente fáciles de controlar durante su fabricación.

Los tubos compuestos pueden teóricamente duplicar la capacidad de soportar altas presiones con relación a los

tubos simples, e incluso, se han desarrollado las condiciones de Gadolín, mediante las cuales se puede optimizar la resistencia igualando las tensiones equivalentes del tubo interior y en el tubo exterior y optimizar las dimensiones de los tubos para que estas tensiones sean mínimas. La Teoría de los Tubos Compuestos y las Condiciones de Gadolín aparecen descritas en [5] pero solamente para materiales iguales en el tubo exterior y en el interior, lo que limita ampliamente sus aplicaciones. En el Manual de Resistencia de Materiales [6] que recoge lo más avanzado de la Mecánica de Materiales, de la antigua URRS hasta el año de su publicación, sólo aparece tratada la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y en Síntesis los Tubos Compuestos, pero no se detallan las Condiciones de Optimización de Gadolín. En la literatura más moderna de Mecánica de Materiales de América no aparece la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas o se trata de forma muy elemental [7,8,9,10,11] e incluso en la literatura de Mecánica de Materiales Avanzada y de Teoría de la Elasticidad [12] se desarrolla la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas y Tubos Compuestos, pero no se habla de esta teoría para materiales diferentes, ni se mencionan las Condiciones de Optimización de Gadolín. Hay que destacar que la Teoría de los Tubos Compuestos presenta numerosas aplicaciones, donde sería necesario conocer sus ecuaciones, no sólo para materiales iguales en ambos tubos, sino

para materiales diferentes en los tubos interior y exterior. Así por ejemplo en la zafra 2001-2002 operaron 57 nuevas alzadoras del modelo BMH-II ensambladas en Cuba por el SIME, en 10 complejos agroindustriales azucareros de 7 provincias, con excelentes resultados, las mismas son autopropulsadas y montadas sobre tres neumáticos en forma de triciclo. La máquina es capaz de desarrollar una velocidad superior al modelo de alzadora tradicional, al que supera tanto en peso promedio de los bultos de caña como en capacidad de maniobra en zonas de terrenos irregulares, con mejores condiciones de trabajo para los operadores y mayor rendimiento general. Esta alzadora tiene la posibilidad de llenar los camiones o carretas en menos tiempo, presenta un consumo de combustible inferior a la alzadora tradicional y puede operar en campos de hasta 35 grados de pendiente, según se ha podido comprobar. La máquina cuenta con un circuito hidráulico principal para su traslación, otro secundario para el movimiento de la grúa que recoge la caña y un sistema de bombeo auxiliar de refrigeración del aceite. A la Empresa T-15 de Cienfuegos se le asignaron cuatro alzadoras de este modelo la cual tiene gran importancia ya que agilizan el trabajo y la producción es más eficiente. Sin embargo, se han presentado averías en las mismas, que consiste en el surgimiento de grietas en el cuerpo del distribuidor ya que el material de este, es hierro fundido gris de grafito laminar y no es el adecuado para soportar las altas presiones hidráulicas de trabajo del sistema hidráulico de la alzadora BMH-II, por lo que se produce la fractura del cuerpo. El colectivo de Mecánica Aplicada de la Facultad de Mecánica de la Universidad de Cienfuegos desarrolla una Investigación para darle solución a este problema mediante la recuperación del cuerpo de hierro fundido. El Objetivo Fundamental es

la recuperación del cuerpo mediante el encasquillado con un tubo de acero en la zona del orificio donde se produce la fractura y al mismo tiempo paralelamente se propone desarrollar la Teoría de los Tubos Compuestos para materiales diferentes en la pieza interior y exterior realizar el cálculo del espesor adecuado de un casquillo de acero que será colocado por interferencia en la posición del agujero del distribuidor donde se produce la fractura y realizar el cálculo de la interferencia necesaria entre el tubo interior de acero y el tubo exterior de hierro fundido con el objetivo de soportar la presión interior requerida en esas secciones del distribuidor, pero para ello se necesita desarrollar la Teoría de los Tubos Compuestos de dos Materiales Diferentes en el tubo Exterior y el Interior, ya que en el caso mencionado el Tubo Interior sería de acero dúctil y Tubo Exterior sería el cuerpo de hierro fundido frágil del distribuidor.

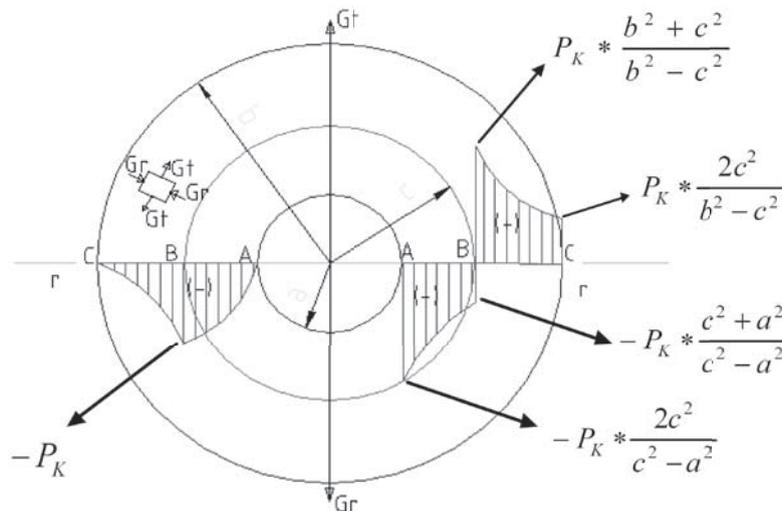
Desarrollo

Teoría de los Tubos Compuestos de materiales iguales en el tubo interior y en el exterior.

Durante el ensamblaje del tubo compuesto surgen tensiones producto de la presión p_k que aparece en la superficie de encaje de ambos tubos debido a la interferencia. Las tensiones que se originan producto de la presión p_k se muestran en la Figura 1.

La presión P_k que sigue durante el ensamblaje depende de la interferencia radial Δ de las cualidades elásticas de los materiales y de las dimensiones de las piezas ensambladas durante el encaje de la pieza interior en el orificio de la

Figura 1. Tensiones originadas durante el ensamblaje del Tubo Compuesto.



exterior, al ser el radio de esta última menor en una magnitud Δ , se produce desplazamientos en estos radios de manera que el radio interior de la pieza exterior aumentará en una magnitud (U_2) y el exterior de la pieza interior disminuirá en una magnitud (U_1). La suma algebraica de estos desplazamientos radiales tienen que ser igual a Δ .

$$U_2 - U_1 = \Delta \quad (1)$$

Aquí (U_1) es negativo, lo que se convierte realmente en una suma.

Aplicando la Teoría de los Tubos de Paredes Gruesas se tiene que:

$$U_1 = -\frac{1-\mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2-a^2} \cdot P_K - \frac{1+\mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2-a^2} \cdot P_K$$

De la misma forma se puede hallar (U_2).

$$U_2 = -\frac{1-\mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2-c^2} \cdot P_K + \frac{1+\mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2-c^2} \cdot P_K$$

De acuerdo con la ecuación (1) se tiene que despejando P_K

$$P_K = \frac{\Delta}{\left(\frac{1-\mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2-c^2} + \frac{1+\mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2-c^2} + \frac{1-\mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2-a^2} + \frac{1+\mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2-a^2} \right)} \quad (2)$$

Las tensiones durante el ensamble de los tubos dependen del valor de esta presión P_K . Después de que está ensamblado el tubo interior en el tubo exterior el conjunto está listo para trabajar con una presión interior (p), dado que

el tubo interior está sometido a compresión, tendría que anularse estas tensiones de compresión para que el tubo interior aumentará sus tensiones de tracción, pero las tensiones provocadas por la presión de trabajo (p) en el tubo exterior son menores que en el interior. En la figura 2 se muestran las tensiones provocadas por (p).

Al superponerse las tensiones previas originadas por la presión que surge durante el ensamble p_k y las tensiones que surgen por la presión de trabajo p . Se obtiene el cuadro de tensiones que da en la figura 3.

Optimización de los Tubos Compuestos. Condiciones de Gadolín

La condición de optimización de los tubos compuestos en el caso de materiales iguales en el tubo interior y exterior consiste en igualar las tensiones equivalentes en los puntos A y B del tubo (Feodosiev, 1985). La máxima resistencia se obtiene cuando $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}$, aplicando esta condición según la Tercera Hipótesis, se obtiene que:

$$p \cdot \frac{b^2 \cdot (c^2 - a^2)}{c^2 \cdot (b^2 - a^2)} = p_k \cdot \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (3)$$

La presión p_k que aparece en el encaje durante el ensamble con una interferencia Δ se muestra en la expresión (2.4), esta expresión aparece deducida en el Capítulo I

$$p_k = \frac{E \cdot \Delta}{2 \cdot c^3} \cdot \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{(b^2 - a^2)} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (2) y despejando $\delta = 2\Delta$ se obtiene que:

Figura 2. Tensiones originadas por la presión interior p de trabajo después de ensamblado el tubo.

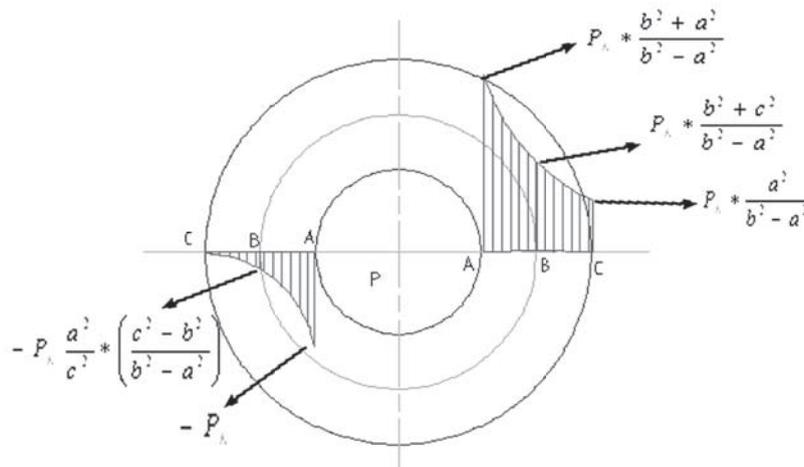
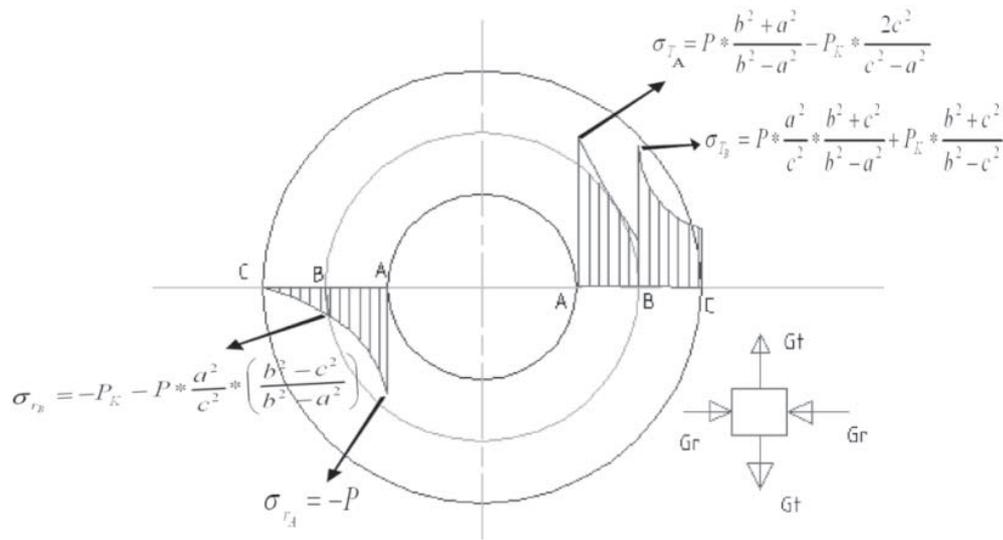


Figura 3. Tensiones resultantes en el tubo compuesto en operación.



$$\delta = 2 \cdot \Delta = \frac{4 \cdot p}{E} \cdot \frac{c \cdot b^2 \cdot (c^2 - a^2)}{b^2 \cdot (c^2 - a^2) + c^2 \cdot (b^2 - c^2)} \quad (5)$$

Que es la interferencia diametral requerida para lograr que $\sigma_{eqA} = \sigma_{eqB}$.

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eqA} = \sigma_{eqB} = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right] \quad (6)$$

La optimización del Tubo consiste en hallar el valor de c para el cual σ_{eq} es mínima. Derivando σ_{eq} e igualando a cero, se obtiene:

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dc} = 0 \rightarrow c = \sqrt{a \cdot b} \quad (7)$$

Sustituyendo finalmente este valor de C en σ_{eq} se obtiene:

$$\sigma_{eq}^{\min} = p \cdot \frac{b}{b-a} \leq [\sigma]_t \quad (8)$$

Como se vio anteriormente, si hallamos el límite de esta expresión cuando $b \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\sigma_{eq}^{\min} = p \leq [\sigma]_k \text{ de donde: } p_{\max} = [\sigma]_k \quad (9)$$

La presión máxima que puede soportar el tubo compuesto se duplica con relación al tubo simple. Estas ecuaciones de

optimización de la resistencia han sido desarrolladas para tubos de iguales materiales y se conocen en la Mecánica de Materiales como Condiciones de Gadolín [5].

Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales dúctiles diferentes

Las tensiones equivalentes se pueden calcular en los puntos A y B de acuerdo con algunas de las Hipótesis de Resistencia. Si ambos materiales son dúctiles se puede usar la Tercera Hipótesis de Resistencia.

$$\begin{aligned} \sigma_{eqA} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{Ta} - \sigma_{Ra} &= P \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - (-P) \\ \sigma_{eqA} &= P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{eqB} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{Tb} - \sigma_{Rb} \\ \sigma_{eqA} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \left(-P_K - P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} \right) \\ \sigma_{eqA} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} + P_K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \quad (11) \end{aligned}$$

En el caso de materiales diferentes la condición de optimización no se logra igualando las tensiones equivalentes, sino dividiendo la condición de resistencia para el tubo A entre la condición de resistencia del tubo B. Esta relación para óptima resistencia debe ser igual a la relación entre las tensiones admisibles a tracción, o a la relación entre las

tensiones límites a tracción de los dos materiales, como la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma_{eqA}}{\sigma_{eqB}} = \frac{[\sigma]_{tA}}{[\sigma]_{tB}} = \frac{\sigma_{lim.tA}}{\sigma_{lim.tB}} = K \quad (12)$$

De esta ecuación de $\sigma_{eqA} = K\sigma_{eqB}$ se puede despejar P_K e igualando entonces la con la ecuación (2) se puede despejar Δ , que será la interferencia radial que garantiza la igualdad de resistencia entre ambos tubos.

$$\sigma_{eqA} = K \cdot \sigma_{eqB}$$

$$P_K = \frac{P \left(K \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right) \cdot (-1)}{\left(-\frac{2c^2}{c^2 - a^2} - K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right) \cdot (-1)}$$

$$P_K = \frac{P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left(-K \frac{a^2}{c^2} + 1 \right)}{\left(\frac{2c^2}{c^2 - a^2} + K \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right)}$$

$$P_K = \frac{Pb^2 \left(-K \cdot a^2 + c^2 \right)}{c^2 \left(b^2 - a^2 \right)} \cdot \frac{\left(c^2 - a^2 \right) \left(b^2 - c^2 \right)}{\left[c^2 \left(b^2 - c^2 \right) + K \cdot b^2 \left(c^2 - a^2 \right) \right]} \quad (13)$$

Igualando P_K en la ecuación (2) se obtiene Δ .

$$P_K = \frac{\Delta}{\left(\frac{1-\mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1+\mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1-\mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1+\mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)}$$

$$\frac{Pb^2 \left(-K \cdot a^2 + c^2 \right)}{c^2 \left(b^2 - a^2 \right)} \cdot \frac{\left(c^2 - a^2 \right) \left(b^2 - c^2 \right)}{\left[c^2 \left(b^2 - c^2 \right) + K \cdot b^2 \left(c^2 - a^2 \right) \right]} = \frac{\Delta}{\left(\frac{1-\mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1+\mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1-\mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1+\mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right)}$$

$$\Delta = \frac{Pb^2 \left(-K \cdot a^2 + c^2 \right)}{c^2 \left(b^2 - a^2 \right)} \cdot \frac{\left(c^2 - a^2 \right) \left(b^2 - c^2 \right)}{\left[c^2 \left(b^2 - c^2 \right) + K \cdot b^2 \left(c^2 - a^2 \right) \right]} \cdot \left(\frac{1-\mu_2}{E_2} \cdot \frac{c^3}{b^2 - c^2} + \frac{1+\mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2 \cdot c}{b^2 - c^2} + \frac{1-\mu_1}{E_1} \cdot \frac{c^3}{c^2 - a^2} + \frac{1+\mu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 \cdot c}{c^2 - a^2} \right) \quad (14)$$

El valor de P_K obtenido se sustituye en la expresión (10) quedando expresado la ecuación de la tensión equivalente en función de $p, a, b, c, E_1, E_2, \mu_1$ y μ_2 .

$$\sigma_{eqA} = P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - \left[P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right]$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(-K \cdot a^2 + c^2) \cdot (b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right] \quad (15)$$

Derivando el valor de σ_{eq} obtenido con relación a c , e igualando a 0 se puede obtener el de c para que σ_{eqmin} , $\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial c} = 0$

y sustituyendo finalmente ese valor de c en la expresión obtenida de σ_{eq} se obtiene el valor de $\sigma_{eqmin} = f(p, a, b, c \text{ y } K)$. Esta operación de derivación de σ_{eq} y el despeje de c valor para el cual σ_{eqmin} se realizó en todos los casos que veremos a continuación utilizando el Software Derive 6.

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(c^2 - K \cdot a^2) \cdot (b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right]$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{c^2b^2 - c^4 - Ka^2b^2 + Ka^2c^2}{c^2b^2 - c^4 + Kb^2c^2 - Ka^2b^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{eqA}}{\partial c} = \left(\frac{-2Pb^2}{b^2 - a^2} \right) \cdot \left[\frac{(2cb^2 - 4c^3 + 2cKa^2)(c^2b^2 - c^4 + Kb^2c^2 - Kb^2a^2) - (c^2b^2 - c^4 - Ka^2b^2 + Ka^2c^2)(2cb^2 - 4c^3 + 2cKb^2)}{(c^2b^2 - c^4 + Kb^2c^2 - Kb^2a^2)^2} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_{eqA}}{\partial c} = \frac{4b^2cKp(c^4 - Ka^2b^2)}{[a^2b^2k - c^2[b^2(K+1) - c^2]]^2}$$

Igualando a 0.

$$4b^2cKp(c^4 - Ka^2b^2) = 0$$

$$c^4 - Ka^2b^2 = 0$$

$$c^2 = \sqrt{Kab}$$

$$c = \sqrt[4]{K} \sqrt{ab} \quad (16)$$

Sustituyendo c en la expresión obtenida.

$$\sigma_{eqmin} = \sigma_{eqA}$$

Sustituyendo c^2 en σ_{eqA} .

$$\sigma_{eqmin} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(c^2 - K \cdot a^2) \cdot (b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - c^2) + K \cdot b^2(c^2 - a^2)} \right]$$

$$\sigma_{eqmin} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} \cdot \left[1 - \frac{(\sqrt{Kab} - K \cdot a^2) \cdot (b^2 - \sqrt{Kab})}{\sqrt{Kab}(b^2 - \sqrt{Kab}) + K \cdot b^2(\sqrt{Kab} - a^2)} \right]$$

Resolviendo el corchete.

$$\sigma_{eq\min} = \frac{2Pb^2K\sqrt{Kab}}{\sqrt{Kab}(1+K) - 2Ka^2} \quad (17)$$

Para validar las expresiones si se hace $K = 1$, se trataría de materiales iguales en los tubos interior y exterior y se debería obtener: $c = \sqrt{ab}$ y $\sigma_{eq\min} = p \cdot \frac{b}{b-a}$, lo que se comprueba a través de las ecuaciones (16) y (17). Las Ecuaciones (2), (14), (15), (16) y (17) representan las Ecuaciones de los Tubos Compuestos y de las Condiciones de optimización de Gadolín para dos materiales dúctiles diferentes en los tubos.

Teoría de los Tubos Compuestos y Condiciones de Gadolín para materiales diferentes en el tubo interior y en el exterior, para el caso de material dúctil en el tubo interior y frágil en el exterior

Si se trata de materiales diferentes pero el material del tubo interior es dúctil y el del tubo exterior es frágil entonces para la pieza interior de material dúctil se puede plantear la Condición de Resistencia por la Tercera Hipótesis de Resistencia, pero la pieza exterior de material frágil se calculará por la Teoría de Mohr.

$$\sigma_{eqA} = P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \leq [\sigma]_A \quad (18)$$

Para la pieza exterior de material frágil utilizaremos en esta primera evaluación la Teoría Clásica de Mohr.

$$\sigma_{eqB} = \sigma_1 - \gamma \cdot \sigma_3 = \sigma_{tB} - \gamma \cdot \sigma_{rB} \leq [\sigma]_B$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + P_K \cdot \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \gamma \left[-P_K - P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} \right]$$

$$\sigma_{eqB} = P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \left[b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma) \right] + P_K \left[\frac{b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)}{b^2 - c^2} \right] \quad (19)$$

$$\text{Aquí: } \gamma = \frac{[\sigma]_B}{[\sigma]_A} \quad (20)$$

$$\text{Y si se designa a } K = \frac{[\sigma]_A}{[\sigma]_B} \quad (21)$$

Se tiene que

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \left[b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma) \right] + P_K \left[\frac{b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)}{b^2 - c^2} \right] \right]$$

De esta ecuación se puede despejar P_K , o sea la presión en el encaje de los tubos que garantiza la igualdad de resistencia entre el tubo interior u exterior e igualando esta con la expresión (2) se puede despejar Δ que será la interferencia radial que garantiza la igualdad de resistencia entre ambos tubos.

$$P \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - P_K \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} = K \left[P \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \left[b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma) \right] + P_K \left[\frac{b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)}{b^2 - c^2} \right] \right]$$

$$P_K = \frac{[c^2(2Pb^2) - K[Pa^2b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]](b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)[K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)c^2} \quad (22)$$

Sustituyendo este valor de p_k en la ecuación (18) de σ_{eqA} se obtiene:

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - P_K \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} - \frac{[c^2(2Pb^2) - K[Pa^2b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]](b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)[K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)c^2} \frac{2c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\sigma_{eqA} = \frac{2Pb^2 \left\{ (c^2 - a^2) [K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)c^2 \right\} - 2c^2 \cdot [c^2(2Pb^2) - K[Pa^2b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma)]](b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)[K(b^2(1+\gamma) + c^2(1-\gamma))] + (b^2 - c^2)c^2} \quad (23)$$

Derivando σ_{eqA} se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{eqA}}{\partial c} = \frac{4ckP \left\{ b^2c^4 - a^2k[b^4(\gamma+1)^2 + 2b^2c^2(\gamma+1)(1-\gamma) + c^4(\gamma-1)^2] \right\}}{\left\{ c^2k[b^2(\gamma+1) + c^2(1-\gamma)] - c^2[b^2(k(\gamma+1)+2) - c^2(k(\gamma-1)+2)] \right\}^2}$$

E igualando la derivada a 0 y despejando c se obtiene:

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot k^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{a \cdot \sqrt{k}(\gamma-1) + 2b}} \quad (24)$$

Al sustituir en c, $k = 1$ y $\gamma = 1$ se debe obtener la condición para materiales dúctiles iguales en ambos tubos, lo que como se aprecia se cumple satisfactoriamente, sirviendo esto de validación para las ecuaciones

$$c = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot \sqrt{b}}{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Las Ecuaciones (2), (20), (21), (22), (23) y (24) representan las Ecuaciones de los Tubos Compuestos y de las Condiciones de optimización de Gadolín para el caso de un tubo de dos materiales dúctiles diferentes, dúctil en el tubo interior y frágil en el exterior. Si se sustituye la Ecuación (24) en la expresión (23), se obtiene la expresión de σ_{eqmin} .

Aplicación a la Recuperación del Cuerpo del Distribuidor de la Alzadora de Caña BMH II

La alzadora BMH II cuenta con un circuito hidráulico principal para su traslación, otro secundario para el movimiento de la grúa que recoge la caña y un sistema auxiliar de refrigeración del aceite. Estos circuitos presentan tres bombas hidráulicas en las cuales dos de ellas se dirigen a los distribuidores y la otra es la que va conectada al hidromotor la cual realiza la función de autopropulsión. De las dos bombas que se dirigen a los distribuidores, una de ellas va hacia un distribuidor de una sección y esta tiene un comando que hace que mueva el brazo de forma vertical hacia arriba y hacia abajo, el otro distribuidor está compuesto por dos secciones (palancas), una de estas palancas permite la rotación del brazo y la otra hace que la jaiba se abra o se cierre, todo esto es realizado por el operario. Este distribuidor sufre averías durante la explotación producto de grietas que aparecen en el tabique entre dos de los orificios para válvulas. En la Fig. 3.2 se muestra una vista del cuerpo del distribuidor donde está presente la grieta marcada en rojo.

Según la observación metalografía de la estructura, el análisis químico y las mediciones de dureza realizadas que arrojaron como valor medio HB = 188, se concluye que el material se corresponde un Hierro Fundido Gris de baja resistencia, similar a la Fundición Gris FG 12, pudiendo tomarse una Resistencia Máxima a la Tracción: $\sigma_t = 120$ MPa y una Resistencia Máxima a la Compresión: $\sigma_c = 500$ MPa, el cual tiene una dureza entre HB = 143 – 229. Como tenacidad a la fractura de la fundición Gris se localizaron, los valores límites para Fundiciones Grises, el valor mínimo de $K_{IC \min} = 3.16 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m}$, reportado por Partón [13] y el mayor valor encontrado en la literatura consultada $K_{IC \max} = 22 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m}$ reportado en el trabajo de Casals [14]. Tratándose de una Fundición Gris de Baja Resistencia se utilizará en el análisis un valor de la Tenacidad a la

Fractura bajo, o sea: $K_{IC \min} = 4 \text{ MPa} \cdot \sqrt{m}$. En la Fig.5 se muestra el procesamiento por el MEF del cuerpo del distribuidor donde $\sigma_{max} = 58,47 \text{ MPa}$.

En las Figs. 6 a) y 6 b) se muestran las Gráficas de Resistencia Residual y de Crecimiento Subcrítico obtenidas como resultado de la aplicación de la Mecánica de la Fractura [15,16,17,18]. Para la tensión de trabajo el tamaño crítico de la grieta dio $a_c = 1.05 \text{ mm}$ y la vida residual 13 577 ciclos y su tiempo de vida es de 28 días después de puesto en la Máquina trabajando en condiciones muy severas de presión, lo que confirma que el hierro fundido empleado no es adecuado para esta aplicación. La solución aplicada se basó en que el espacio entre orificios en el distribuidor es igual a 14 mm. Para distribuir ese espacio entre los dos casquillos (agujero grande y pequeño) y un pequeño espacio intermedio de hierro fundido se propuso para el agujero pequeño colocar un casquillo de diámetro exterior $d = 43 \text{ mm}$, o sea, de espesor $s = 5 \text{ mm}$ y para el agujero grande $d = 51 \text{ mm}$, o sea, de espesor $s = 4 \text{ mm}$, quedando de esta manera un espesor de hierro fundido de $s = 5 \text{ mm}$ entre ambos casquillos de acero, suficiente para depositar un cordón de soldadura muy fino para fijar y hermetizar los casquillos de acero al cuerpo de hierro fundido. Aplicando las Condiciones de Optimización, para el Agujero Grande con $a = 21,5 \text{ mm}$, $b = 31 \text{ mm}$, se obtuvo: $c = 30,5 \text{ mm}$ que corresponde con $d = 61 \text{ mm}$. Este resultado se corresponde plenamente con los resultados obtenidos en el trabajo donde se concluyó que la situación ideal era aumentar al máximo el espesor del casquillo de acero y que con una interferencia pequeña de $\delta = 0,01 \text{ mm}$ se apreciaba que aumentando el diámetro exterior del casquillo de acero por encima de $d = 51 \text{ mm}$ se mejoraba la resistencia del hierro fundido. Para lograr este resultado de acuerdo con la expresión de Δ obtenida para lograr la igualdad de resistencia entre el casquillo de acero y el cuerpo de hierro fundido hace falta una interferencia mucho más grande: $\delta = 2 \Delta = 0,106 \text{ mm}$, que provocaría una presión de ajuste

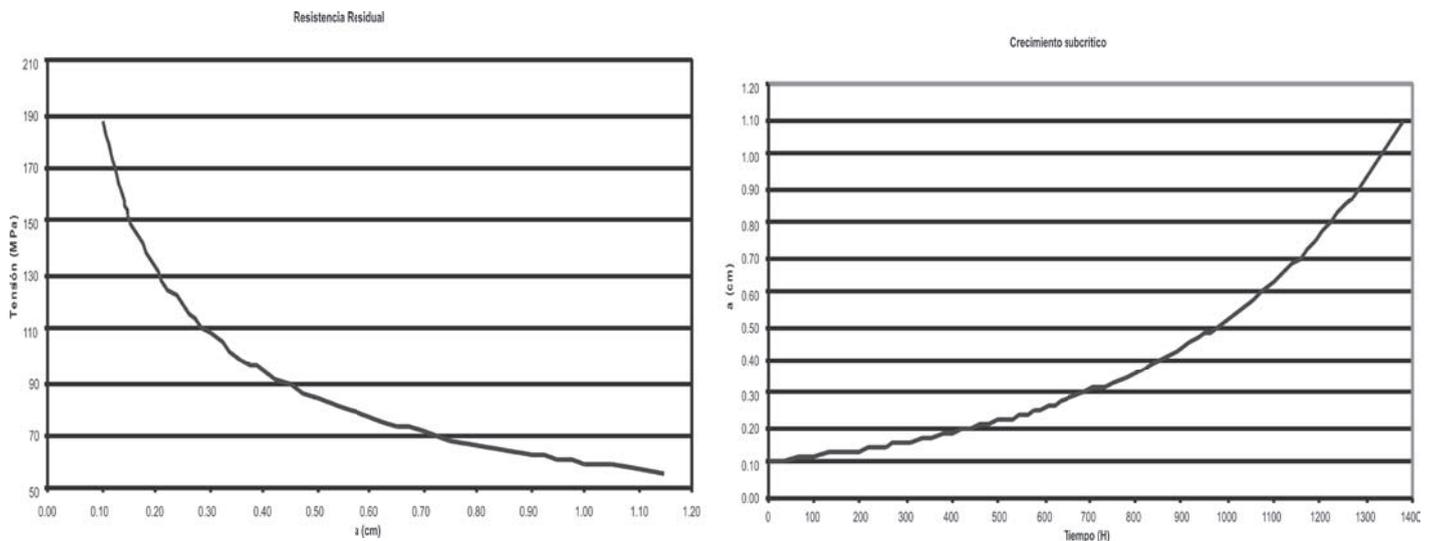
Figura 4. Vistas de la alzadora BMH II y del Distribuidor Hidráulico con la grieta señalada en rojo.



Figura 5. Procesamiento del cuerpo con el MEF.



Figura 6. a) Gráfica de Resistencia Residual b) Gráfica de Crecimiento Subcrítico.



en el encaje de $p_k = 0,00276$ MPa, todo lo cual conduciría a reducir la tensión equivalente de ambas piezas, en el caso del hierro fundido $\sigma_{eqB} = 19,25$ MPa, menos de la tercera parte del valor obtenido por el Método de los Elementos Finitos.

Conclusiones

1. Se desarrolló el Aporte Científico Fundamental del Trabajo que fue la obtención de las ecuaciones de los Tubos Compuestos de Materiales Diferentes en ambos tubos, aplicando en los mismos las Condiciones de Optimización de Gadolín en las siguientes variantes:

- a) Materiales dúctiles diferentes en ambos tubos, aplicando la Tercera Hipótesis de Resistencia.
- b) Material frágil en el tubo exterior y dúctil en el interior, aplicando la Hipótesis Clásica de Mohr.

2. Se evaluó la resistencia del cuerpo de Hierro Fundido Gris del Distribuidor para lo cual: Se caracterizó el material del cuerpo del distribuidor que es de hierro fundido gris lo cual presentó una dureza de 188 HB y una estructura del grafito ferrita – perlítica laminar por lo que es una fundición no muy buena a la tracción. Se consideró que era equivalente a la Fundición Gris FG 12.

3. Mediante la Aplicación del Método de los Elementos Finitos mediante el Software Cosmos Design Star que la tensión de trabajo en la pared de hierro fundido es de $\sigma = 58,47$ MPa.
 4. Aplicando la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica y la Mecánica de la Fractura Subcrítica se obtuvo que una grieta o defecto superficial de cuarto de elipse de profundidad $a_c = 1,05$ mm provoca la fractura del cuerpo en esa sección y que la vida residual partiendo de un defecto microscópico hasta que se destruye la pieza bajo esa tensión es de sólo 28 días, lo que permite afirmar que el mencionado hierro fundido no es adecuado para esta aplicación.
 5. Se aplicó la Teoría de los Tubos Compuestos para Materiales Diferentes, en el cuerpo interior acero y en el exterior hierro fundido obteniéndose que para optimizar la resistencia del distribuidor recuperado se necesita: para el agujero pequeño colocar un casquillo de diámetro exterior $d = 43$ mm, o sea, de espesor $s = 5$ mm y para el agujero grande $d = 51$ mm, o sea, de espesor $s = 4$ mm, quedando de esta manera un espesor de hierro fundido de $s = 5$ mm entre ambos casquillos de acero, suficiente para depositar un cordón de soldadura muy fino para fijar definitivamente los casquillos de acero al cuerpo de hierro fundido.
 6. Finalmente se aplicaron las ecuaciones obtenidas en el presente trabajo para optimizar la resistencia de los Tubos Compuestos de dos Materiales mediante las Condiciones de Gadolín, concluyéndose que la solución que fue aplicada pudiera ser optimizada utilizando para el agujero pequeño un casquillo de acero grado 20 con diámetro exterior $d = 47,6$ mm, o sea, de espesor $s = 7,3$ mm y para el agujero grande $d = 61$ mm, o sea, de espesor $s = 9$ mm. Sin embargo esta solución optimizada no hubiera podido ser aplicada realmente porque en este caso se trata de dos orificios muy cercanos y el espesor disponible para los dos casquillos es de sólo 14 mm y esta solución requeriría 16,3 mm, no quedando espacio disponible para colocar el pequeño cordón de soldadura que se considera necesario para hermetizar el ensamble.
- [4] Timoshenko S. Resistencia de Materiales. Madrid: Editorial ESPASA_CALPE S.A. 1962. — 2do, Tomo, 498 p.
- [5] Feodosiev V.I. Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR, 3ª Ed. 1985. — 583 p.
- [6] Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.K. Manual de Resistencia de Materiales. Moscú: Editorial MIR, 1989, -- 693 p.
- [7] Fitzgerald F. Mecánica de Materiales. México: Editorial Alfaomega S.A. de CV, 1996. -- 560 p.
- [8] Fogiel M. Problem solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids. New Jersey: Editorial REA, 1988. — 1140 p.
- [9] Mott R.L. Applied Strength of Materials. New Jersey: Editorial Prentice-Hall, 2ª. Ed. 1990. — 559 p.
- [10] Mott R.L. Resistencia de Materiales Aplicada. México: Editorial Prentice- Hall Hispanoamericana S.A. 3ª. Ed. 1996. — 640 p.
- [11] Spiegel L., Limbrunner G.F. Applied Statics and Strength of Materials. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall, 1999. — 644 p.
- [12] Solecki R. and Jai R. Advanced Mechanics of Materials. Oxford University Press. 2003.
- [13] Partón, V. Z. Mecánica de la Destrucción. Moscú: Editorial MIR. 1990. — 414 p.
- [14] Casals, J. M.; Ríos, R.; Villellas, A. Experiencias del uso de ensayos de tenacidad a la fractura con probetas pequeñas y entalla tipo Chevrón. Anales de Mecánica de la Fractura. Ribadesella, 9 – 11 Abril, 1997. p. 135 – 146.
- [15] Blake, A. Practical Fracture Mechanic in Design. New York: Marcel Dekker. Inc. 1996. 437 p.
- [16] Broek, D. Fracture Control for the Chemical Process Industries. St. Louis: The Materials Technology Institute of the Chemical Process Industries. Inc. 1983. — 571 p.
- [17] Goytisoló R. Mecánica de la Fractura, Curso de Mecánica de la Fractura, Maestría de Mecánica Aplicada, Universidad de Cienfuegos, Cuba, 2000.
- [18] Kawasaki T. Outline of JWES standard for critical assessment of defects with regard to brittle fractures and some cases studies. I. I. W.: Annual Assembly (Bratislava), 10: p.274 – 284, 1979.

Bibliografía

- [1] Den Hartog, J.P. Advanced Strength of Materials. New York. McGraw / Hill Company. 1952. — 379 p.
- [2] Seely F.B. Resistencia de Materiales. México: Editorial Hispano Americana. 1954. — 591 p.
- [3] Olsen G.A. Elements of Mechanics of Materials. New York. John Wiley & Sons. 1952. -- 535 p.